Quelques rappels concernant l'étude d'une fonction

1 Comment calculer une limite ?

— On commence par vérifier s'il s'agit d'une limite « facile » : résultats de cours, opérations classiques sur les limites. $\rightsquigarrow$ *voir cours de sup*

— Si c'est de la forme « $\frac{\ell\neq 0}{0}$ », alors la limite est $\pm\infty$, une étude de signe permet de conclure.

— S'il s'agit d'une *forme indéterminée* « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « 1^∞ » ou « $\frac{0}{0}$ », il faut alors lever l'indétermination : on peut factoriser par le terme dominant, utiliser un équivalent, faire appel aux croissances comparées ou encore utiliser un DL (ce dernier surtout s'il s'agit d'une limite en 0).

Exemple 1 – *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\ln(x)-3}{x-4}$.

Il s'agit d'une limite de la forme « $\frac{\ell\neq 0}{0}$ ». On a $\ln(4)-3<0$ donc, via le signe de $x-4$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\ln(x)-3}{x-4}=+\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\ln(x)-3}{x-4}=-\infty}$.

Exemple 2 – *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)-3}{x-4}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On a $\dfrac{\ln(x)-3}{x-4}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\ln(x)}{x}$ donc, par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-3}{x-4}=0}$.

Exemple 3 – *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$.

On utilise l'écriture exponentielle $(\cos x)^{1/x}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cos x)\right)$; on a donc affaire à une forme indéterminée « $\infty\times 0$ ». Or par DL :

$$\frac{1}{x}\ln(\cos x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=-\frac{x}{2}+o(x^2).$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2}=0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}=\mathrm{e}^0=1}$.

2 Comment montrer qu'une fonction est continue ?

— **En un point :** on montre que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

— **Sur un intervalle :** si la fonction est bien définie sur tout l'intervalle, il suffit de dire que la fonction est somme, produit, composée, quotient de fonctions usuelles continues.

Exemple 4 – *Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

- D'abord f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
- Il reste à faire l'étude en 0. Par DL, on a $f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{x+o(x)}{x}=1+o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$, *i.e.* f est continue en 0.
- D'après ces deux points, on a montré que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

3 Comment montrer qu'une fonction est dérivable ?

— **En un point :** on montre que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

— **Sur un intervalle :** si la fonction est bien définie sur tout l'intervalle, il suffit de dire que la fonction est somme, produit, composée, quotient de fonctions usuelles dérivables. (Sauf la fonction racine carrée, cf ci-dessous.)

Exemple 5 – *Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

- Tout d'abord f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.
- En 0, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\dfrac{\sin x-x}{x^2}\underset{x\to 0}{\overset{\text{DL}}{=}}\dfrac{-1}{6}x+o(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.
Cette limite est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
- On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

⚠ La fonction racine carrée est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 (la tangente y est verticale). Par exemple la fonction $x\mapsto\sqrt{x-5}$ est continue sur $[5\,;+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]5\,;+\infty[$.

4 Quelques définitions utiles

Définition 6 – Parité

Une fonction f est *paire* (respectivement *impaire*) sur un intervalle I si :

① I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* $\forall x \in I,\ -x \in I$),

② $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Définition 7 – Périodicité

Une fonction f est *périodique de période* $T > 0$ si f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.

Remarque. Ces propriétés se traduisent graphiquement : le graphe dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'une fonction :

- paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- impaire est symétrique par rapport à l'origine,
- T-périodique se « répète » par translation horizontale de vecteur $T\vec{\imath}$.

Définition 8 – Petit o

Une fonction f est *négligeable* devant g au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Définition 9 – Équivalent $\sim$

Deux fonctions f et g sont *équivalentes* au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple 10

On a $\cos x \underset{+\infty}{=} o(x)$. On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$ (premier terme du DL).

⚠ On a $\mathrm{e}^x + x \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ mais $\mathrm{e}^x + x \underset{-\infty}{\sim} x$.

Définition 11 – Fonction de classe $\mathcal{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction f est de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I si elle est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k-ème est continue sur I. Une fonction f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est infiniment dérivable sur I.

Exemple 12 – *Une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$

On reprend la fonction f des exemples 4 et 5. On a déjà montré qu'elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$. On va montrer qu'elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en montrant que la fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$.

- On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. La fonction f' est donc continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.
- Pour l'étude en 0, en effectuant un DL à l'ordre 3 du numérateur (à faire !), on obtient $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{-x}{3} + o(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, *i.e.* f' est continue en 0, c'était ce qu'il restait à démontrer.

5 Théorèmes usuels

Théorème 13 – Théorème de la bijection

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$. Autrement dit, pour tout $k \in J$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans I.

Exemple 14

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ donc la fonction cos réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ dans $[-1\,;1]$. (La bijection réciproque est la fonction arccos.)

Théorème 15 – Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in\,]a\,;b[,\ |f'(x)| \leqslant M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

Théorème 16 – Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.