Quelques rappels concernant l'étude d'une fonction

1 Comment calculer une limite ?

— On commence par vérifier s'il s'agit d'une limite « facile » : résultats de cours, opérations classiques sur les limites. $\rightsquigarrow$ *voir cours de sup*

— Si c'est de la forme « $\dfrac{\ell \neq 0}{0}$ », alors la limite est $\pm\infty$, une étude de signe permet de conclure.

— S'il s'agit d'une *forme indéterminée* « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « 1^∞ » ou « $\dfrac{0}{0}$ », il faut alors lever l'indétermination : on peut factoriser par le terme dominant, utiliser un équivalent, faire appel aux croissances comparées ou encore utiliser un DL (ce dernier surtout s'il s'agit d'une limite en 0).

Exemple 1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4}$.

Il s'agit d'une limite de la forme « $\dfrac{\ell \neq 0}{0}$ » et on a $\ln(4) - 3 < 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4} = -\infty}$.

Exemple 2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On a $\dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$ donc, par croissances comparées, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x) - 3}{x - 4} = 0}$.

Exemple 3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$.

On utilise l'écriture exponentielle $(\cos x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x} \ln(\cos x)\right)$; on a donc affaire à une forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». Or par DL :

$$\frac{1}{x}\ln(\cos x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x}{2} + o(x^2).$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\ln(\cos x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{2} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x} = \mathrm{e}^0 = 1}$.

2 Comment montrer qu'une fonction est continue ?

— **En un point :** on revient à la définition en montrant que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

— **Sur un intervalle :** si la fonction est bien définie sur tout l'intervalle, il suffit de dire que la fonction est somme, produit, composée, quotient de fonctions usuelles continues.

Exemple 4. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Tout d'abord f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles.

• Il reste à faire l'étude en 0. Par DL, on a $f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x + o(x)}{x} = 1 + o(1)$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, *i.e.* f est continue en 0.

• On a donc montré que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

3 Comment montrer qu'une fonction est dérivable ?

— **En un point :** on revient à la définition en montrant que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

— **Sur un intervalle :** si la fonction est bien définie sur tout l'intervalle, il suffit de dire que la fonction est somme, produit, composée, quotient de fonctions usuelles dérivables. (Sauf la fonction racine carrée, cf ci-dessous.)

Exemple 5. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Tout d'abord f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

• En 0, on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2} \underset{x \to 0}{\overset{\mathrm{DL}}{=}} \dfrac{-1}{6}x + o(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Cette limite est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

• On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

⚠ La fonction racine carrée est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x - 5}$ est continue sur $[5\,;+\infty[$ mais dérivable seulement sur $]5\,;+\infty[$.

4 Quelques définitions utiles

Définition. Une fonction f est *paire* (respectivement *impaire*) sur un intervalle I si I est symétrique par rapport à 0 (*i.e.* $\forall x \in I$, $-x \in I$) et $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Définition. Une fonction f est *périodique de période* $T > 0$ si f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque. Ces propriétés se traduisent graphiquement : le graphe dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ d'une fonction

- paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées,
- impaire est symétrique par rapport à l'origine,
- T-périodique se « répète » par translation horizontale de vecteur $T\vec{\imath}$.

Définition. Une fonction f est *majorée* par M (resp. *minorée* par m) sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant M$ (resp. $f(x) \geqslant m$).
Une fonction f est *bornée* sur I si elle est majorée et minorée sur I.

Exemple 6. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est π-périodique, paire et bornée (par -1 et 1).

Définition. On dit qu'une fonction f est *négligeable* devant g au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Définition. On dit que deux fonctions f et g sont *équivalentes* au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple 7. On a $\cos x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $x^2 \sin x \underset{0}{=} o(x)$.
D'après l'exemple 4, on a $\sin x \underset{0}{\sim} x$ (NB : c'est le premier terme du DL).
⚠ On a $\mathrm{e}^x + x \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ mais $\mathrm{e}^x + x \underset{-\infty}{\sim} x$.

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction f est de *classe* $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I si elle est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k-ème est continue sur I. En particulier, une fonction f est de *classe* $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.
Une fonction f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est infiniment dérivable sur I.

Exemple 8. On a déjà montré dans les exemples 4 et 5 que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$. On va montrer qu'elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en montrant que la fonction f' est continue sur $\mathbb{R}$.
• On a pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. La fonction f' est donc continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.
• Pour l'étude en 0, en effectuant un DL à l'ordre 3 du numérateur (à faire !), on obtient $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{-x}{3} + o(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, *i.e.* f' est continue en 0, c'était ce qu'il restait à démontrer.

5 Théorèmes usuels

Théorème. [Théorème des valeurs intermédiaires]
Si une fonction f est continue sur $[a\,;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$; autrement dit l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Théorème. [Théorème de la bijection]
Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$. Autrement dit, pour tout $k \in f(I)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans I.

Exemple 9. La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ donc la fonction cos réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ dans $[-1\,;1]$. (La bijection réciproque est la fonction arccos.)

Théorème. [Inégalité des accroissements finis]
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a\,;b[$, $|f'(x)| \leqslant M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

Théorème. [Théorème de Rolle]
Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.